dev : Équivalence des normes.

leçons : 203, 206
réf : Hauchecorne p576.

thm : En dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.

dem :

Soit E un $\mathbb{K}$-evn de dimension finie $n \geq 1$.
Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E ok car E de dim finie.
On considère alors l'application :
$$N_\infty : x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \longmapsto \sup_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$
qui définit une norme sur E.

Soit N une norme sur E. Soit $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \in E$.

- $N(x) \leq \sum_{i=1}^n |x_i| N(e_i)$ par inégalité triangulaire.
  $\leq N_\infty(x) \sum_{i=1}^n N(e_i)$

On pose alors $M := \sum_{i=1}^n N(e_i) > 0$ (car $e_i \neq 0$ car base et norme)

On a alors : $\forall x \in E \quad N(x) \leq M \times N_\infty(x)$.

- Montrons désormais qu'il existe $m > 0$ tel que : $\forall x \in E \quad m N_\infty(x) \leq N(x)$

Supposons par l'absurde que $\sup_{x \in E \setminus \{0\}} \frac{N_\infty(x)}{N(x)} = +\infty$.

On a, pour tout $x \in E$, $\frac{N_\infty(x)}{N(x)} = \frac{N_\infty(x)}{N_\infty(x) N\left(\frac{x}{N_\infty(x)}\right)} = \frac{1}{N\left(\frac{x}{N_\infty(x)}\right)}$

Considérons alors $S_\infty := \{x \in E \mid N_\infty(x) = 1\}$. (la sphère unité de N_∞)

$\sup_{x \in E \setminus \{0\}} \frac{N_\infty(x)}{N(x)} = +\infty \iff \sup_{x \in S_\infty} \frac{1}{N(x)} = +\infty \iff \inf_{x \in S_\infty} N(x) = 0$.

Soit $(x_p)_{p \geq 0}$ une suite de S_∞ tel que $N(x_p) \xrightarrow[p \to +\infty]{} 0$ (ok car inf $= 0$ donc existe)

Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on considère $x_p = \sum_{i=1}^n x_p^i e_i$

On a $\max_{1 \leq i \leq n} |x_p^i| = 1$ donc chacune des sous suites $(x_p^i)_{p \geq 0}$ est bornée. Or $\mathbb{K}$ est compact par le théorème de Bolzano Weierstrass :

* il existe alors $(x^1_{\varphi_1(p)})_{p \geq 0}$ une sous-suite de $(x_p^1)_{p \geq 0}$ convergent vers $l_1 \in \mathbb{R}$.
* de même, $(x^2_{\varphi_1(p)})_{p \geq 0}$ est une suite bornée donc il existe une sous-suite $(x^2_{\varphi_2 \circ \varphi_1(p)})_{p \geq 0}$ convergente vers $l_2 \in \mathbb{R}$.
* en itérant ce procédé jusqu'à n, on a $(x^i_{\varphi_n \circ \dots \circ \varphi_1(p)})_p$ qui converge vers l_i pour tout i.

Posons alors $\varphi = \varphi_n \circ \dots \circ \varphi_1$ et $l = \sum_{i=1}^n l_i e_i$

On a : $N_\infty(x_{\varphi(p)} - l) \xrightarrow[p \to +\infty]{} 0$

et par 2nd inégalité triangulaire : $|N_\infty(x_{\varphi(p)}) - N_\infty(\ell)| \leq N_\infty(x_{\varphi(p)} - \ell)$

d'où $\underbrace{N_\infty(x_{\varphi(p)})}_{=1} \xrightarrow[p\to+\infty]{} N_\infty(\ell)$ et $N_\infty(\ell) = 1$.

Or, $|N(x_{\varphi(p)}) - N(\ell)| \leq N(x_{\varphi(p)} - \ell) \leq \beta N_\infty(x_{\varphi(n)} - \ell)$ — par le point précédent

d'où $N(x_{\varphi(p)}) \xrightarrow[p\to+\infty]{} N(\ell)$.

Mais $N(x_p) \xrightarrow[p\to+\infty]{} 0$ donc $N(\ell) = 0$. ABSURDE car $\ell \in S_\infty$.

. On a donc :

$$0 < \alpha = \sup \frac{N_\infty(x)}{N(x)} < +\infty$$

d'où $\frac{1}{\alpha} N_\infty(x) \leq N(x)$ pour tout $x \in E$.

. N_∞ et N sont donc équivalentes, ce qui conclut.

En effet, si N' est une autre norme sur E. On aurait :

$\exists\, c, C > 0$ tels que $cN_\infty \leq N \leq CN_\infty$

puis, $N \frac{c}{M} \leq \frac{M}{M} cN_\infty = cN_\infty \leq N \leq CN_\infty = \frac{\alpha}{\alpha} N_\infty \times C \leq C\alpha N$

d'où N et N' sont équivalentes.